Integralrechnung

Andreas Rottmann

15. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Das unbestimmte Integral

1.1 Integration als Umkehrung des Differenzierens

Ist $f(x)$ die erste Ableitung von $F(x)$, also $F'(x) = f(x)$, nennt man $F(x)$ auch *Stammfunktion* von $f(x)$. Um von $F(x)$ zu $f(x)$ zu kommen, bedient man sich des mathematischen Verfahrens des *Differenzierens*. Um aber aus einer Ableitung deren Stammfunktion zu erhalten, muß man diese *integrieren*. Man spricht dann vom Integral der Funktion f und drückt das mathematisch so aus: $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Die *Integration* is also die Umkehrfunktion zur *Differentation*. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 + 3x^2 + 5 \\ f(x) &= 3x^2 + 6x \\ f'(x) &= 6x + 6 \end{aligned}$$

Hier ist jede Funktion eine Ableitung der Funktion über ihr, sowie eine Stammfunktion der Funktion unter ihr.

Da beim Differenzieren die Konstanten ja wegfallen, gibt es zu einer Funktion $f(x)$ eigentlich unendlich viele Stammfunktionen $F(x)$. Diese Menge nennt man unbestimmtes Integral. Symbolisch:

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F \mid F'(x) = f(x)\}}$$

1.2 Integrationsregeln

Da die Integration die Umkehrung der Differentation ist, kann man die Integrationsregeln für Funktionen, die durch Ableitung von sogenannten *Grundfunktionen* gefunden werden, sofort angegeben werden. Hier als Beispiel die Differentation einer Potenzfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^n \\ f(x) &= n \cdot x^{n-1} \\ f'(x) &= n(n-1)x^{n-2} \end{aligned}$$

Anhand obigen Beispiels läßt sich leicht die Regel für das Integrieren von Potenzfunktionen ersehen: der Exponent wird um eins erhöht und die neue Funktion durch ihren neuen Exponenten dividiert. Mathematisch:

$$\boxed{\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

Für andere Grundintegrale sei auf die einschlägige Literatur (Formelsammlungen) verwiesen.

1.2.1 Funktionen mit konstantem Faktor

Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen „gezogen“ werden:

$$\boxed{\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

1.2.2 Algebraische Summen

Eine Summenfunktion wird integriert, indem man die einzelnen Glieder integriert:

$$\boxed{\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \dots]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x) \pm \int f_2(x) \pm \int f_3(x) \pm \dots + c}$$

1.2.3 Integration durch Substitution

Für Funktionen, die sich nicht durch Umformung in Grundintegrale integrieren lassen, ist die Integration oft sehr schwierig. Es lassen sich aber viele Integrale in Gruppen einteilen und nach einer für diese Gruppe geeigneten Methode lösen. Eine dieser Methoden ist die Lösung eines Integrals durch Substitution. So können manche Integrale durch Einführung einer neuen Variablen auf Grundintegrale zurückgeführt und dann gelöst werden.

Hier als Beispiel die Integration von $\int (a_0 + a_1)\,\mathrm{d}x$ einmal nach der Summenformel und einmal durch die Substitution $z = a_0 + a_1 x$.

Nach der Summenformel erhält man als Lösung:

$$\int (a_0 + a_1 x)\,\mathrm{d}x = a_0 \cdot \int \mathrm{d}x + a_1 \cdot \int x\,\mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + c$$

Bei Einführung einer neuen Variablen $a_0 + a_1 x = z$ kann das Integral nur dann gelöst werden, wenn auch $\mathrm{d}x$ durch $\mathrm{d}z$ substituiert wird.

Den Wert von $\mathrm{d}x$ erhält man durch Differentation der neuen Veränderlichen z und Umstellen nach $\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright\ a_0 + a_1 x = z \Rightarrow \int z\,\mathrm{d}x = ?$$
$$a_0 + a_1 x = z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{a_1}\,\mathrm{d}z$$

Man setzt $a_0 + a_1 x = z$ sowie $\mathrm{d}x$ in das Integral ein und erhält so ein lösbares Grundintegral.

Nach Auflösung wird für z bzw. z^2 der ursprüngliche Wert eingesetzt.

Beide Lösungsansätze führen zum selben Ergebnis. Zwar unterscheiden sich die Integrationskonstanten c und c_1, dies bedeutet jedoch nur, daß aus der Menge der Integralfunktionen des unbestimmten Integrals zwei verschiedene gefunden wurden.

$$
\begin{aligned}
\int (a_0 + a_1 x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a_1}\int z\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2a_1} z^2 + c_1 \blacktriangleright z^2 = (a_0 + a_1 x)^2 \\
&= \frac{1}{2a_1}(a_0 + a_1 x)^2 + c_1 \\
&= \frac{a_0^2}{2a_1} + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + c_1 \blacktriangleright \frac{a_0^2}{2a_1} + c_1 = c \\
&= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + c
\end{aligned}
$$

Dieser an diesem einfachen Beispiel gezeigte Vorgang läßt sich verallgemeinern:

$$
\boxed{\int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\varphi'(x)} \quad \text{für} \quad \varphi(x) = z;\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\varphi'(x)}}
$$

Diese Gleichung läßt sich für Integrale der Form $\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$ spezialisieren:

$$
f(x) = z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{f'(x)}
$$

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{z\cdot f'(x)}{f'(x)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{z^2}{2} + c \blacktriangleright z^2 = [f(x)]^2 \\
&= \frac{1}{2}[f(x)]^2 + c
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\boxed{\int f(x)\cdot f'(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + c}
$$

1.2.4 Partielle Integration

Viele Integrale, bei denen sich die Substitutionsmethode nicht anwenden läßt, können durch geeignete Zerlegung des Integranden in zwei Faktoren und anschließende Integration gelöst werden.

Die Lösungsformel dafür erhält durch Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung:

$$
\begin{aligned}
f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) &= [u(x) \cdot v(x)]' \\
[u(x) \cdot v(x)]' &= u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x) \\
\int [u(x) \cdot v(x)]' \,\mathrm{d}x &= \int [u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)] \,\mathrm{d}x \\
u(x) \cdot v(x) &= \int u(x) \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x + \int u'(x) \cdot v(x) \,\mathrm{d}x \\
\int u(x) \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Nochmals das Ergebnis:

$$
\boxed{\int u(x) \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \,\mathrm{d}x}
$$

2 Das bestimmte Integral

2.1 Das bestimmte Integral als Grenzwert

Historisch gesehen war es die Aufgabe der Integralrechnung, Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen zu berechnen.

Aus der Berechnung der Fläche folgen andere Anwendungen, wie die Berechnung von Bogenlängen, Volumina, Schwerpunkten, Trägheitsmomenten u.a.

Das Verfahren der Flächenberechnung durch Integration läßt sich an einem Beispiel erläutern. Man teilt die gesuchte Fläche A im Intervall $[a, b]$ in möglichst viele gleichbreite Flächenstreifen auf. Die enstehenden Rechtecke haben alle die Breite Δx und die Höhe $f(x)$. Addiert man die Flächenstreifen, so erhält man die Näherungswerte $\underline{A}$ (Untersumme) und $\overline{A}$ (Obersumme).

Die gesuchte Fläche liegt zwischen den beiden Näherungsflächen $\underline{A}$ und $\overline{A}$, d.h. $\underline{A} < A < \overline{A}$.

Je höher die Zahl der Rechtecke im Intervall $[a, b]$, desto genauer die Näherungswerte $\underline{A}$ und $\overline{A}$.

Die Fläche A kann somit als Summe unendlich vieler Flächenstreifen im Intervall $[a, b]$ aufgefaßt werden. Sie wird als „bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a und b“ bezeichnet und $[I]_a^b$ geschrieben.

Man kann man diese Annäherung durch einen Grenzwertübergang ausdrücken:

$$
\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = [I]_a^b = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x}
$$

2.2 Integration mit Stammfunktionen

Für jede Stammfunktion g von f gilt, falls $[a, b] \subseteq D_f$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = g(x)|_a^b = g(b) - g(a)}$$

3 Anwendungsgebiete

3.1 Flächeninhalt ebener Flächen

3.1.1 Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse

Wie bereits in Abschnitt 2 gezeigt, läßt sich das bestimmte Integral als Flächeninhalt der vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den Intervallgrenzen eingeschlossenen Fläche definieren. Hier müssen je nach Lage der Funktion mehrere Fälle unterschieden werden.

Liegt die Fläche zur Gänze über- bzw. unterhalb der x-Achse gilt folgende Flächenformel:

$$\boxed{[A]_a^b = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|}$$

Schneiden sich f und x-Achse, so müssen die Teilflächen nach obiger Formel — wobei für a und b die entsprechenden Intervallgrenzen einzusetzen sind – berechnet und addiert werden, um die Gesamtfläche zu erhalten.

3.1.2 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen

Für Funktionen ohne Schnittpunkt gilt:

$$\boxed{[A]_a^b = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] \right|}$$

Schneiden sich die Funktionen, muß wieder jede Teilfläche berechnet und die Summe gebildet werden.

3.2 Volumina

Einen Körper, dessen Querschnittsfunktion A bekannt ist, kann man in beliebig viele „Scheibchen“ zerlegen. Ist n die Anzahl der „Scheibchen“ und $n \to \infty$, kann das Scheibchen als Prisma mit einer Grundfläche von $A(x)$ Flächeneinheiten aufgefaßt werden. Das gesuchte Volumen V ist dann der Grenzwert für $n \to \infty$ der Summe aller Prismen. Dies kann aber auch als Integral ausgedrückt werden:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k \Delta x = \int_0^h A(x)\,\mathrm{d}x$$

Allgemein für ein Intervall $[a, b]$:

$$\boxed{[V]_a^b = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x}$$

3.2.1 Rotationskörper

Läßt man die Fläche zwischen einer Funktion f und der x-Achse rotieren, so beschreibt diese Fläche bei einer Umdrehung von 360° einen Körper der symmetrisch zur x-Achse liegt. Solche Körper nennt man Rotations- oder Drehkörper.

Da bei einem Rotationkörper jeder Querschnitt ein Kreis mit dem Radius $f(x)$ ist, lautet die Querschnittsfunktion entsprechend der Kreisfläche $A = r^2 \cdot \pi$:

$$A = \pi \cdot [f(x)]^2$$

Bildet man jetzt das Integral im Intervall $[a, b]$, so erhält man eine allgemeingültige Formel für das Volumen von Rotationskörpern bei Drehung um die x-Achse:

$$\boxed{[V]_a^b = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$$

Für eine Drehung um die y-Achse bildet man die Umkehrfunktion f^{-1} von f und erhält durch Einsetzen des Funktionsterms $f(y)$ der Umkehrfunktion in die obige Formel:

$$\boxed{[V]_a^b = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} [f(y)]^2 \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 \mathrm{d}y}$$

Hier ist zu beachten, das das Integrationsintervall nicht $[a, b]$, sondern $[f(a), f(b)]$ ist.

Literatur

[1] Kusch, Rosenthal, Jung: *Mathematik — Band 4, Integralrechnung*